Musteraufgaben für das Fach Mathematik

2012

Impressum

Das vorliegende Material wurde von einer Arbeitsgruppe mit Vertretern aus den Ländern Bayern, Hamburg, Mecklenburg-Vorpommern, Niedersachsen, Sachsen und Schleswig-Holstein erarbeitet.

Herausgeber:

Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus

Behörde für Schule und Berufsbildung Hamburg

Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Mecklenburg-Vorpommern

Niedersächsisches Kultusministerium

Sächsisches Staatsministerium für Kultus und Sport

Ministerium für Bildung und Kultur Schleswig-Holstein

Inhaltsverzeichnis

Seite

Vorbemerkungen

Für das Fach Mathematik werden zwei Aufgabenpools vorgelegt, die sich dadurch unterscheiden, dass Aufgaben aus dem Aufgabenpool 1 unterhalb des Anforderungsbereichs III liegen, während die Aufgaben aus dem Aufgabenpool 2 diesen zumindest in einem Aufgabenteil erreichen. Die Aufgaben der beiden Aufgabenpools sind ohne elektronische Hilfsmittel (z. B. Taschenrechner, Software) sowie ohne Tabellen- oder Formelsammlung zu bearbeiten. Pro Aufgabe können 5 Bewertungseinheiten (BE) erreicht werden. Die Länder wählen für die Prüfungsteilnehmer, welche auf erhöhtem Anforderungsniveau geprüft werden, als gemeinsame Prüfungselemente drei Aufgaben aus dem Aufgabenpool 1 sowie eine Aufgabe aus dem Aufgabenpool 2 aus. Diese vier Aufgaben umfassen Lerninhalte aus jedem der Sachgebiete Analysis, Lineare Algebra/Analytische Geometrie und Stochastik und berücksichtigen die in den EPA Mathematik ermöglichten Alternativen vektorielle analytische Geometrie und Anwendung von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen.

Um die Schülerinnen und Schüler sowie die Lehrkräfte mit den Anforderungen der gemeinsamen Prüfungselemente in der zentralen schriftlichen Abiturprüfung ab 2014 vertraut zu machen, wird in den beteiligten Ländern einmalig im Schuljahr 2013/14 ein schriftlicher Leistungsnachweis eingesetzt. Dafür werden in analoger Weise zur zentralen schriftlichen Abiturprüfung Aufgabenpools bereitgestellt. Die Durchführung des schriftlichen Leistungsnachweises und die Auswahl der Aufgaben aus den Aufgabenpools werden in den Ländern geregelt.

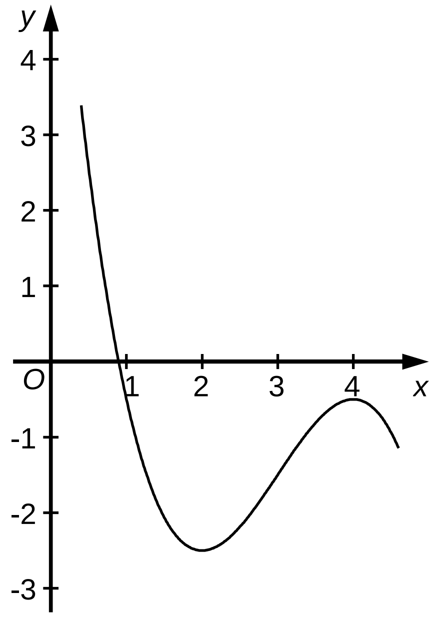
Die vorliegenden Musteraufgaben sollen den Lehrkräften sowie den Schülerinnen und Schülern eine Orientierung hinsichtlich der gemeinsamen Prüfungselemente und der gemeinsamen Aufgaben für den schriftlichen Leistungsnachweis geben.

1 Musteraufgaben für Aufgabenpool 1

1.1 Analysis

A1_1

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = -0{,}5 \cdot x^3 + 4{,}5 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 7{,}5 \quad (x \in \mathbb{R})$.



1.1 Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Gleichung $0 = -0{,}5 \cdot x^3 + 4{,}5 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 7{,}5$ nur genau eine Lösung hat.

2 BE

1.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von f.

3 BE

	Vorgaben für die Bewertung	
1.1	Begründung unter Einbeziehung des erkennbaren Verlaufs des Graphen und geeigneter Eigenschaften ganzrationaler Funktionen dritten Grades	2 BE
1.2	Berechnung der Koordinaten des Wendepunktes: $(3 \mid -1{,}5)$	3 BE

A1_2

Das Rechteck *ABCD* mit $A(1|0)$, $B(4|0)$, $C(4|2)$ und $D(1|2)$ wird durch den Graphen der Funktion *f* mit $f(x)=\sqrt{x}\quad (x \in \mathbb{R}, x \geq 0)$ in zwei Teilflächen zerlegt.

Ermitteln Sie das Verhältnis der Inhalte der beiden Teilflächen.

5 BE

	Vorgaben für die Bewertung	
	Berechnung des Flächeninhaltes unterhalb des Graphen von *f*: $\frac{14}{3}$	2 BE
	Berechnung des Flächeninhaltes oberhalb des Graphen von *f*: $\frac{4}{3}$	2 BE
	Angabe des Verhältnisses: 7 : 2	1 BE

1.2 Analytische Geometrie/Lineare Algebra

1.2.1 Analytische Geometrie

G1_1

Gegeben sind die Ebene $E:\ 2 \cdot x_1 + x_2 - x_3 - 4 = 0$ sowie der Punkt $P\left(-3 \middle| 0 \middle| 2\right)$.

1.1 Zeigen Sie, dass der Punkt *P* nicht in der Ebene *E* liegt.

1 BE

1.2 Spiegelt man den Punkt *P* an der Ebene *E*, so erhält man den Punkt *P´*.
Ermitteln Sie die Koordinaten von *P´*.

4 BE

	Vorgaben für die Bewertung	
1.1	Nachweis	1 BE
1.2	Ermittlung der Koordinaten von *P´*: $P'\left(5 \middle| 4 \middle| -2\right)$	4 BE

G1_2

Gegeben ist das Viereck *ABCD* mit den Eckpunkten $A(0|0|0)$, $B(-3|1|4)$, $C(2|-4|4)$ und $D(5|-5|0)$.

1.1 Weisen Sie nach, dass das Viereck *ABCD* ein Parallelogramm, aber kein Rechteck ist.

3 BE

1.2 Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes und den Radius eines Kreises mit dem Durchmesser $\overline{AC}$ an.

2 BE

	Vorgaben für die Bewertung	
1.1	Nachweise	3 BE
1.2	Angabe der Koordinaten des Mittelpunktes: $(1|-2|2)$ Angabe des Radius: 3	1 BE 1 BE

1.2.2 Lineare Algebra

LA1_1

Gegeben sind die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1.1 Es gelte $\overrightarrow{v_{i+1}} = A \cdot \overrightarrow{v_i}$ mit $i \in \mathbb{N}$.

Berechnen Sie $\overrightarrow{v_2}$.

2 BE

1.2 Bestimmen Sie den Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit den kleinstmöglichen Werten $x, y, z \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

so, dass $A \cdot \vec{w} = \vec{w}$ gilt.

3 BE

	Vorgaben für die Bewertung	
1.1	Berechnung: $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 30 \\ \frac{1}{20} \\ 4 \end{pmatrix}$	2 BE
1.2	Bestimmung: $\vec{w} = \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	3 BE

LA1_2

Betrachtet werden die Matrizen A und B mit $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ und $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -5\end{pmatrix}$ sowie eine Matrix C.

1.1 Zeigen Sie, dass B die zu A inverse Matrix ist.

2 BE

1.2 Für die Matrix C gilt:

$C\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ und $C\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

Begründen Sie, dass gilt: $C\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$.

3 BE

	Vorgaben für die Bewertung	
1.1	Nachweis	2 BE
1.2	Begründung	3 BE

1.3 Stochastik

S1_1

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0,6$.

1.1 Geben Sie an, welche der Abbildungen die Verteilung von X darstellt.
Begründen Sie Ihre Auswahl.

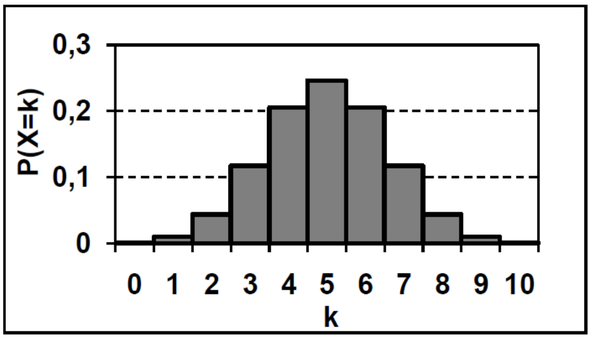


Abbildung 1

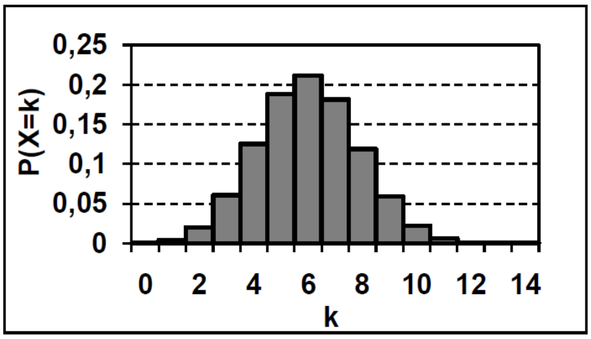


Abbildung 2

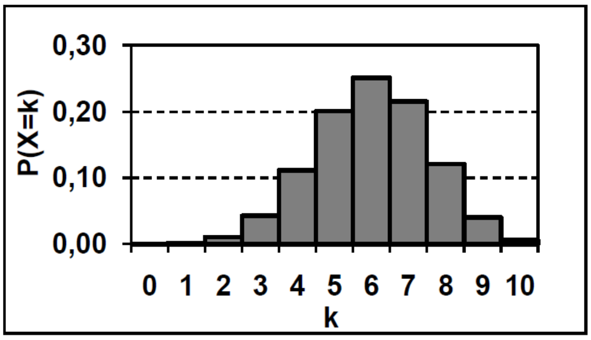


Abbildung 3

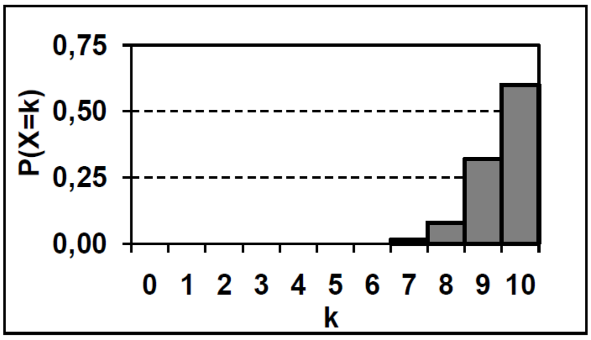


Abbildung 4

3 BE

1.2 Geben Sie mithilfe der von Ihnen ausgewählten Abbildung näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(4 < X < 7)$ und die Wahrscheinlichkeit $P(X \neq 5)$ an.

2 BE

	Vorgaben für die Bewertung	
1.1	Abbildung 3 zeigt die Verteilung von X Begründung	1 BE 2 BE
1.2	Angabe der Wahrscheinlichkeiten: $P(4 < X < 7) = 0,45$ $P(X \neq 5) = 0,8$	2 BE

S1_2

In den Urnen U_1 und U_2 befinden sich Kugeln, die sich nur in ihrer Farbe unterscheiden:

U_1: 6 rote und 4 blaue Kugeln

U_2: 1 rote und 4 blaue Kugeln

1.1 Aus der Urne U_1 werden zwei Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen zufällig gezogen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben.

2 BE

1.2 Es wird eine der beiden Urnen zufällig ausgewählt. Aus dieser wird eine Kugel zufällig gezogen. Die gezogene Kugel ist rot.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Kugel aus der Urne U_1 stammt.

3 BE

	Vorgaben für die Bewertung	
1.1	Bestimmung der Wahrscheinlichkeit: $P(E_1) = \frac{7}{15}$	2 BE
1.2	Bestimmung der Wahrscheinlichkeit: $P(E_2) = \frac{3}{4}$	2 BE

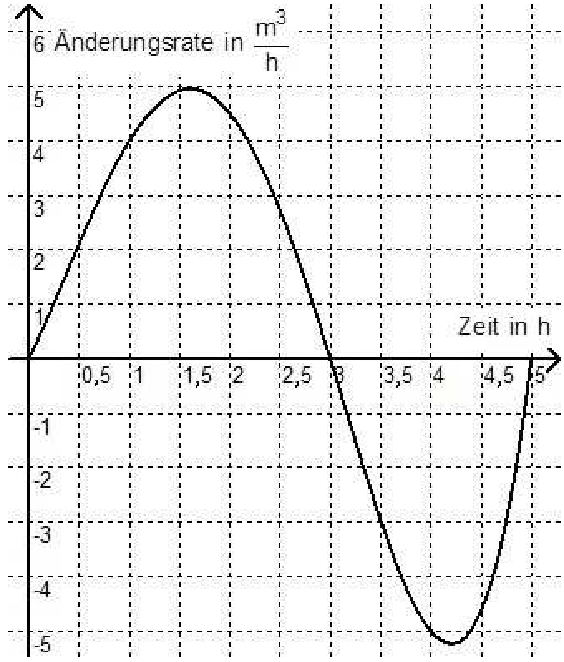
2 Musteraufgaben für Aufgabenpool 2

2.1 Analysis

A2_1

Ein quaderförmiges Speicherbecken für eine Flüssigkeit hat eine Grundfläche von $5\,m^2$ und ist zunächst leer.

Der nebenstehende Graph gibt die Zufluss- bzw. Abflussrate $\left(\text{in } \frac{m^3}{h}\right)$ der Flüssigkeit über einen Zeitraum von 5 Stunden wieder.

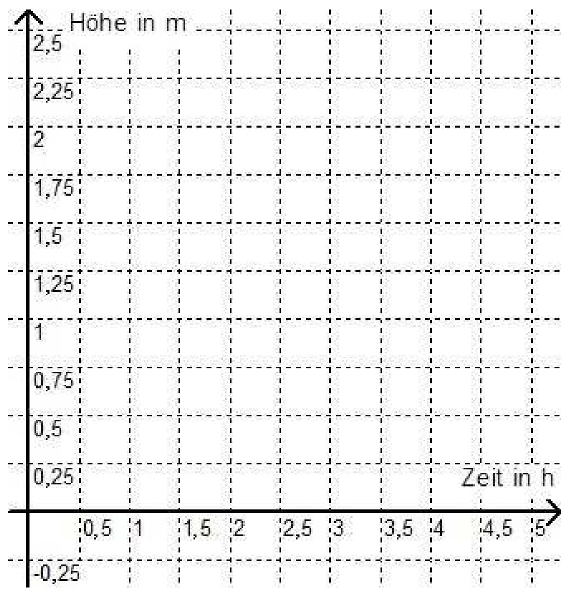


2.1 Bestimmen Sie näherungsweise das Volumen der in den ersten drei Stunden zufließenden Flüssigkeit.

2 BE

2.2 Skizzieren Sie in das nebenstehende Koordinatensystem einen möglichen Graphen, der die Höhe (in m) des Flüssigkeitsstandes im Speicherbecken in Abhängigkeit von der Zeit (in h) beschreibt.

3 BE



	Vorgaben für die Bewertung	
2.1	Angabe eines Bearbeitungsweges	1 BE
	Angabe eines Schätzwertes zwischen $7\,m^3$ und $10\,m^3$	1 BE
2.2	Skizze eines sachgerechten Graphen mit den Merkmalen Verlauf durch $(0\vert 0)$, alle Punkte im ersten Quadranten, Maximum an der Stelle 3 sowie Minimum an der Stelle 5, dort Funktionswert größer 0	3 BE

A2_2

Für jeden Wert für a $(a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = \mathrm{e}^{a \cdot x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Zeigen Sie, dass die Tangente t_a an den Graphen der Funktion f_a im Punkt $P_a\left(1 \middle| f_a(1)\right)$ durch die Gleichung $t_a(x) = 2 \cdot a \cdot e^a \cdot x + e^a \cdot (1 - 2 \cdot a)$ beschrieben werden kann.

5 BE

	Vorgaben für die Bewertung
	Nachweis 5 BE

2.2 Analytische Geometrie/Lineare Algebra

2.2.1 Analytische Geometrie

G2_1

Im Raum sind eine Gerade g und ein Punkt A, der nicht auf der Geraden g liegt, gegeben.

Beschreiben Sie einen Weg zur Ermittlung der Koordinaten zweier Punkte B und C der Geraden g, die zusammen mit A ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck bilden.

5 BE

	Vorgaben für die Bewertung
	Beschreibung 5 BE

G2_2

Gegeben sind die Ebenen E_1 und E_2 mit E_1: $6 \cdot x_1 - x_2 - 4 \cdot x_3 = 12$ und E_2: $-3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = -6$. Die Punkte $A(2|0|0)$ und $B(0|0|-3)$ liegen in beiden Ebenen.

2.1 Begründen Sie, dass die Ebenen E_1 und E_2 nicht identisch sind.

1 BE

2.2 Ermitteln Sie die Koordinaten eines von *A* und *B* verschiedenen Punktes, der ebenfalls in beiden Ebenen liegt.

2 BE

2.3 In der Gleichung von E_2 soll genau ein Koeffizient so geändert werden, dass eine Gleichung der Ebene E_1 entsteht.

Geben Sie diese Änderung an und begründen Sie Ihre Antwort.

2 BE

	Vorgaben für die Bewertung	
2.1	Begründung	1 BE
2.2	Ermittlung der Koordinaten eines Punktes mit der geforderten Eigenschaft	2 BE
2.3	Änderung: Der Koeffizient 5 ist in 0,5 umzuwandeln. Begründung	1 BE 1 BE

2.2.2 Lineare Algebra

LA2_1

Es gibt 2x2-Matrizen, die besondere Eigenschaften bezüglich ihrer Quadrate besitzen.

2.1 Für jeden Wert für t $(t \in \mathbb{R}, t \neq 0)$ ist eine Matrix M_t durch $M_t = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

Ermitteln Sie, welche besondere Eigenschaft die Matrizen M_t bezüglich ihrer Quadrate M_t^2 haben.

2 BE

2.2 Für eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ und $b \cdot c \neq 0$ gilt $A^2 = b \cdot c \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Untersuchen Sie, welche Werte für die Elemente der Matrix *A* in Frage kommen.

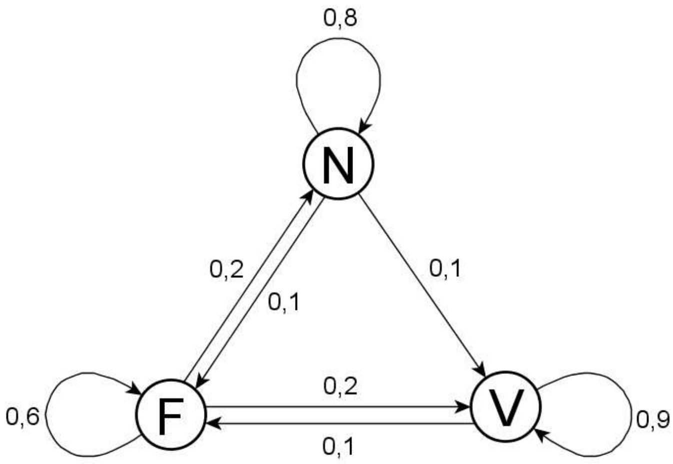
3 BE

	Vorgaben für die Bewertung	
2.1	Ergebnis für M_t^2: $M_t^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	1 BE
	Eigenschaft: Die Quadrate aller Matrizen sind unabhängig von *t* gleich der Einheitsmatrix.	1 BE
2.2	Untersuchung mit dem Ergebnis: Die Elemente *a* und *d* sind gleich 0, *b* und *c* sind ungleich 0.	3 BE

LA2_2

Die Nutzer einer Kantine werden hinsichtlich der Auswahl eines Menüs in drei Gruppen eingeteilt: Esser des Nudelgerichts (N), Esser des Fleischgerichts (F) und Esser des vegetarischen Gerichts (V).

Der nebenstehende Graph gibt die Übergänge zwischen den Gruppen von Tag zu Tag an. Es soll davon ausgegangen werden, dass die Gesamtanzahl der Nutzer dieser Kantine konstant bleibt.



2.1 Geben Sie die in der zugehörigen Übergangsmatrix M fehlenden Werte an.

$$M = \begin{pmatrix} \square & 0{,}1 & \square \\ 0{,}2 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ \square & 0 & \square \end{pmatrix}$$

2 BE

2.2 Geben Sie den Wert a_{22} der Matrix: $M^2 = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ an.

Interpretieren Sie die Bedeutung des Wertes a_{22} im Sachzusammenhang.

3 BE

	Vorgaben für die Bewertung
2.1	Angabe von $M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ 2 BE
2.2	Angabe: $a_{22} = 0{,}83$ 1 BE Interpretation: Der Wert a_{22} der Matrix $M^2 = A$ gibt an, wie groß der Anteil der Nutzer des vegetarischen Essens eines Tages ist, die auch nach zwei Tagen das vegetarische Essen wählen. 2 BE

2.3 Stochastik

S2_1

Verteilungen von Zufallsgrößen werden durch Parameter charakterisiert.

2.1 In den Klassen 10a und 10b, die jeweils aus 25 Schülern bestehen, wurden die Leistungen jedes Schülers im Weitsprung ermittelt. Die Zufallsgrößen A und B ordnen jeweils einem zufällig ausgewählten Schüler der Klasse 10a bzw. 10b seine Sprungweite in Meter zu. Für die Erwartungswerte der beiden Zufallsgrößen gilt $E(A)=E(B)$, für die Standardabweichungen $\sigma(A)<\sigma(B)$.

Erklären Sie anschaulich, was diese beiden Beziehungen für die Verteilungen der Sprungweiten bedeuten.

2 BE

2.2 Eine Zufallsgröße X kann fünf unterschiedliche Werte annehmen.

Geben Sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X so an, dass der Erwartungswert zwischen dem kleinsten und dem zweitkleinsten Wert dieser Zufallsgröße liegt.

3 BE

	Vorgaben für die Bewertung	
2.1	Erklärungen	2 BE
2.2	Angabe einer Wahrscheinlichkeitsverteilung	3 BE

S2_2

Eine verbeulte Münze wird mehrfach geworfen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Wurf „Wappen" fällt, beträgt p.

2.1 Geben Sie jeweils einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse A und B an:

A: Bei fünf Würfen fällt genau dreimal „Wappen".

B: Bei fünf Würfen fällt genau dreimal „Wappen", darunter bei den ersten beiden Würfen zweimal.

3 BE

2.2 Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei drei Würfen dreimal „Wappen" fällt, ist 0,216.

Untersuchen Sie, ob das Ergebnis „Wappen" wahrscheinlicher ist als das Ergebnis „Zahl".

2 BE

	Vorgaben für die Bewertung	
2.1	Wahrscheinlichkeit für Ereignis *A*: $P(A)=\binom{5}{3}\cdot p^3\cdot(1-p)^2$	1 BE
	Wahrscheinlichkeit für Ereignis *B*: $P(B)=p^2\cdot\binom{3}{1}\cdot p\cdot(1-p)^2$	2 BE
2.2	Untersuchung mit dem Ergebnis: Das Ergebnis "Wappen" ist begünstigt.	2 BE