

Mecklenburg-Vorpommern



Nachname, Vorname des Prüflings:

Zentralabitur 2024

Mathematik (CAS)

Leistungskurs

Prüfungsteil B - komplexe Aufgaben

Hinweise für den Prüfling

Aufgabenbearbeitung:

Der Prüfungsteil B beinhaltet

- zwei Pflichtaufgaben (Aufgabe 1 zur Analysis und Aufgabe 2 zur Stochastik) und
- zwei Wahlaufgaben (Aufgaben 3 und 4 zur Analytischen Geometrie).

Bearbeiten Sie die zwei Pflichtaufgaben und eine der Wahlaufgaben.

Sofern ein entsprechender Hinweis in einer Teilaufgabe gegeben wird, sollen graphische Darstellungen im vorliegenden Aufgabendokument angefertigt werden, andernfalls verwenden Sie bitte bereitgestelltes Papier bzw. Millimeterpapier.

Beginnen Sie die Bearbeitung dieses Prüfungsteils B mit dem Eintragen Ihres Namens und Ihres Vornamens auf dem Deckblatt. Geben Sie auf der Reinschrift Ihren Namen sowie die bearbeitete Wahlaufgabe an und nummerieren Sie die Seiten Ihrer Arbeit fortlaufend.

Bearbeitungszeit:

Die Bearbeitungszeit für die Prüfungsteile A und B beträgt einschließlich Auswahlzeit 330 Minuten.

Nach Abgabe des Prüfungsteils A steht Ihnen der verbleibende Zeitraum für die Bearbeitung dieses Prüfungsteils B zur Verfügung.

Hilfsmittel:

Folgende Hilfsmittel stehen zur Verfügung:

- ein an der Schule eingeführtes Tafelwerk,
- ein an der Schule zugelassenes Computeralgebrasystem (CAS),
- Zeichengeräte,
- ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung in gedruckter oder digitaler Form,
- zweisprachiges Wörterbuch in gedruckter oder digitaler Form für Prüflinge mit nichtdeutscher Herkunftssprache.

Bewertung:

Die Lösungen sind in einer sprachlich korrekten, mathematisch exakten und äußerlich einwandfreien Form darzustellen. In der Niederschrift müssen die Lösungswege nachvollziehbar sein.

In der Aufgabe 1 zur Analysis sind 40 Bewertungseinheiten erreichbar, in der Aufgabe 2 (Stochastik) und in den Wahlaufgaben 3 und 4 (Geometrie) sind es jeweils 25 Bewertungseinheiten.

Maximal zwei Bewertungseinheiten können zusätzlich vergeben werden bei guter Notation und Darstellung sowie eleganten, kreativen und rationellen Lösungswegen.

Maximal zwei Bewertungseinheiten können bei mehrfachen Formverstößen abgezogen werden.

1 Analysis - Pflichtaufgabe

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{10^6}x^4 + \frac{4}{9375}x^3 - \frac{13}{250}x^2 + \frac{8}{5}x + 140$ mit dem Definitionsbereich \mathbb{R} .

- 1.1 Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f und bestimmen Sie die Art dieser Extrempunkte. 5 BE

zur Kontrolle: Die Extremstellen sind 20, 100 und 200.

- 1.2 Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von f mit der y -Achse an. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass f genau zwei Nullstellen hat. 4 BE

- 1.3 Für $50 < x < 130$ gibt es ein Paar von x -Werten, die sich um 60 unterscheiden und für die die zugehörigen Funktionswerte übereinstimmen. Bestimmen Sie dieses Paar von x -Werten und geben Sie den zugehörigen Funktionswert an. 4 BE

- 1.4 Der Graph von f schließt mit den Koordinatenachsen und der Gerade mit der Gleichung $x = 240$ ein Flächenstück ein. Die folgende Aussage bezieht sich auf eine zweite Gerade, die das Flächenstück teilt. 4 BE

$$\text{Für } u \approx 217 \text{ gilt: } \frac{1}{2} \cdot u \cdot f(u) + \int_u^{240} f(x) dx = \frac{2}{3} \cdot \int_0^{240} f(x) dx$$

Veranschaulichen Sie die Aussage unter Verwendung einer geeigneten Skizze.

- 1.5 Diabetespatientinnen und -patienten haben die Möglichkeit, mithilfe sogenannter CGM-Geräte ihren Glukosewert, d. h. den Anteil der Glukose im Blut, ständig zu messen.

Die gegebene Funktion f beschreibt für $0 \leq x \leq 240$ modellhaft die Entwicklung des Glukosewerts eines Patienten. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Minuten und $f(x)$ der Glukosewert in Milligramm pro Deziliter ($\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$). Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von f .

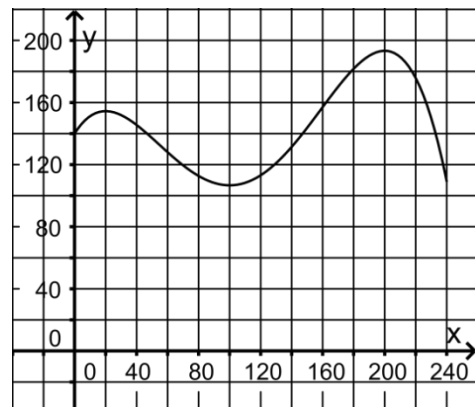


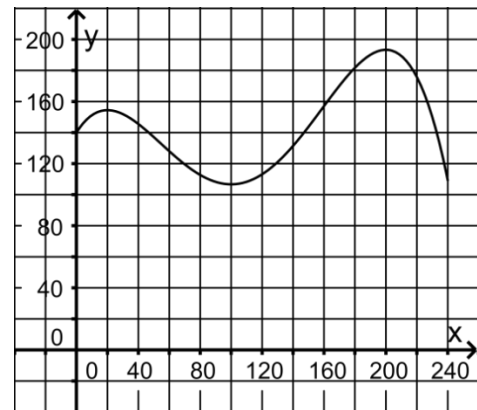
Abbildung 1

- 1.5.1 Berechnen Sie für den betrachteten Zeitraum denjenigen Zeitpunkt, zu dem der Glukosewert am stärksten ansteigt. 4 BE

- 1.5.2 Veranschaulichen Sie jeden der folgenden Terme in der Abbildung 2 durch eine Gerade und geben Sie jeweils die Bedeutung des Terms im Sachzusammenhang an.

I
$$\frac{f(100) - f(20)}{100 - 20}$$

II
$$\lim_{x \rightarrow 60} \frac{f(60) - f(x)}{60 - x}$$



4 BE

Abbildung 2

- 1.6 Betrachtet wird die in \mathbb{R} definierte Funktion s mit $s(x) = a \cdot \sin(b \cdot x) + c$. Die Punkte $E_1(-2 | -1)$ und $E_2(2 | 3)$ sind direkt aufeinanderfolgende Extrempunkte des Graphen von s .

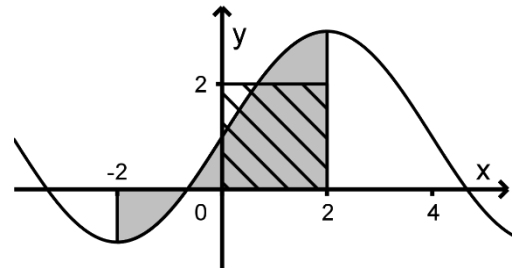
- 1.6.1 Bestimmen Sie die passenden Werte von a , b und c

4 BE

zur Kontrolle: $a = 2$, $b = \frac{\pi}{4}$, $c = 1$

- 1.6.2 Berechnen Sie den Wert des Terms $\int_{-2}^2 s(x) dx$.

Beschreiben Sie mithilfe der Abbildung 2, wie man zu diesem Wert mit geometrischen Überlegungen gelangen kann.



6 BE

Die Punkte des Graphen von s mit der y Koordinate 1 sind die Wendepunkte des Graphen.

- 1.6.3 Zeigen Sie, dass jeder Wendepunkt des Graphen von s eine ganzzahlige x -Koordinate hat und dass der Graph von s in jedem seiner Wendepunkte entweder die Steigung $-\frac{\pi}{2}$ oder die Steigung $+\frac{\pi}{2}$ hat.

2 BE

- 1.6.4 Für jeden Wendepunkt des Graphen von s wird die Gerade betrachtet, die durch diesen Wendepunkt und den Punkt $P(2022 | 2022)$ verläuft. Untersuchen Sie, ob eine dieser Geraden im jeweiligen Wendepunkt Tangente an den Graphen von s ist.

3 BE

2 Stochastik - Pflichtaufgabe

Unter den Versicherten eines Krankenversicherungsunternehmens haben 59 % Datenschutzbedenken (D). Einige der Versicherten nutzen ein Fitnessarmband (F). Von den Versicherten mit Datenschutzbedenken nutzen 23 % ein Fitnessarmband. 19 % aller Versicherten haben keine Datenschutzbedenken und nutzen ein Fitnessarmband.

- 2.1 Stellen Sie den Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar. 3 BE
- 2.2 Unter allen Versicherten wird eine Person zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie ein Fitnessarmband nutzt oder Datenschutzbedenken hat. 2 BE
- 2.3 Eine unter allen Versicherten zufällig ausgewählte Person nutzt ein Fitnessarmband. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie Datenschutzbedenken hat. 3 BE
- 2.4 Die Zahl 0,23 und der Term $0,59 \cdot 0,23 + 0,19$ geben Wahrscheinlichkeiten im Sachzusammenhang an. Es gilt: $0,23 \neq 0,59 \cdot 0,23 + 0,19$. Begründen Sie damit, dass die Ereignisse D und F stochastisch nicht unabhängig sind. 3 BE
- 100 Kunden des Unternehmens werden zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der zufällig ausgewählten Kunden mit Datenschutzbedenken.
- 2.5 Begründen Sie, dass nachfolgend eine Binomialverteilung genutzt werden kann um Vorhersagen dazu zu treffen. 3 BE
Beschreiben Sie außerdem eine Bedingung, unter der diese Annahme nicht getroffen werden kann.
- 2.6 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 3 BE
- weniger als 60 der ausgewählten Versicherten Datenschutzbedenken haben;
 - mindestens die Hälfte und höchstens 64 der ausgewählten Versicherten Datenschutzbedenken haben.
- 2.7 Eine Petition benötigt die Stimmen von 3 000 Personen mit Datenschutzbedenken. Bestimmen Sie, wie viele Personen befragt werden müssen, um mindestens 3 000 Personen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 98 % zu finden. 3 BE

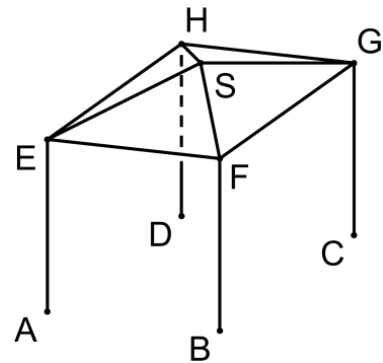
- 2.8 In einer Kiste mit Eiern sind drei Viertel braun, alle anderen Eier sind weiß. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl brauner Eier unter den Bio-Eiern und wird im Folgenden als binomialverteilt angenommen. 5 BE

Nun werden n Eier zufällig ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei dieser Eier weiß sind, ist viermal so groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass alle Eier braun sind. Berechnen Sie den Wert für n .

Hinweis: Von den folgenden Wahlaufgaben 3 und 4 ist **eine** zu bearbeiten.

3 Analytische Geometrie - Wahlaufgabe

Ein Turm auf einem Spielplatz besteht aus vier 4,50 m langen, vertikal stehenden Pfosten, vier horizontalen Balken und einem Dach in Form einer geraden Pyramide. Die Abbildung zeigt den Turm schematisch. Die Dicke der Bauteile des Turms soll vernachlässigt werden.



In einem kartesischen Koordinatensystem können die Enden der Pfosten für einen Wert von z mit $z \in \mathbb{R}$ modellhaft durch die Punkte $A(2|-3|z)$, B , C und $D(-3|-2|z)$ sowie $E(2|-3|4)$, $F(3|2|4)$, $G(-2|3|4)$ und H dargestellt werden, die Spitze des Dachs durch den Punkt $S(0|0|5)$. Dabei beschreibt die xy -Ebene den Untergrund; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Wirklichkeit.

- 3.1 Geben Sie an, wie tief die Pfosten in den Untergrund hineinreichen. 1 BE
- 3.2 Geben Sie die Koordinaten des Punkts H an. Weisen Sie nach, dass das Viereck $EFGH$ ein Quadrat ist. 5 BE
- 3.3 Begründen Sie, dass die Pyramide $EFGHS$ symmetrisch zur z -Achse ist. 3 BE
- 3.4 Die Punkte E , F und S liegen in einer Ebene L . Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform.
zur Kontrolle: $5x - y + 13z = 65$ 3 BE
- 3.5 Berechnen Sie die Größe des Neigungswinkels der Dachfläche, die durch das Dreieck EFS dargestellt wird, gegenüber der Horizontalen. 2 BE
- 3.6 An der Spitze des Dachs ist eine gerade Stange befestigt, deren oberer Endpunkt im Modell durch einen Punkt T dargestellt wird. Auf den Turm treffendes Sonnenlicht lässt sich im Modell durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor \vec{v} beschreiben. Der Schatten der Stange liegt vollständig auf der Dachfläche, die durch das Dreieck EFS beschrieben wird. Beschreiben Sie, wie man die Länge dieses Schattens berechnen kann, wenn die Koordinaten von T und \vec{v} bekannt sind. 4 BE

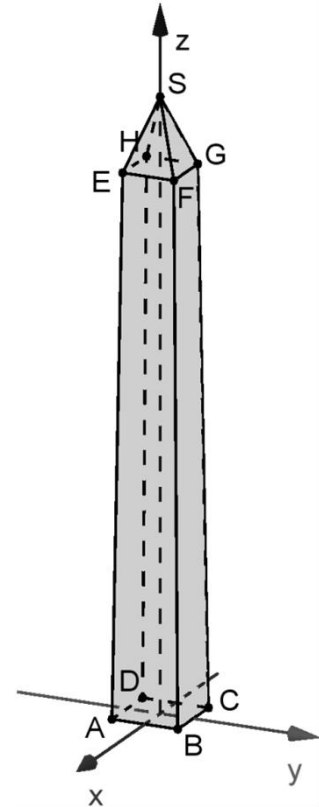
- 3.7 Zur Stabilisierung des Turms wurden zusätzliche Balken mit einer Länge von 2,10 m verwendet. Ein solcher Balken ist mit einem Ende in einer Höhe von 3,50 m über dem Untergrund an einem der vertikal stehenden Pfosten befestigt, mit dem anderen Ende an einem der beiden darauf liegenden horizontalen Balken. Der obere Befestigungspunkt teilt den horizontalen Balken in zwei Abschnitte.
Bestimmen Sie das Verhältnis der Längen der beiden Abschnitte. 4 BE
- 3.8 Es soll eine vertikale Kletterstange aufgestellt werden, deren Fußpunkt im Modell durch einen Punkt P der xy-Ebene beschrieben wird. Die Kletterstange soll von dem Pfosten, der durch \overline{AE} dargestellt wird, doppelt so weit entfernt sein wie von dem Pfosten, der durch \overline{BF} dargestellt wird. 3 BE
Bestimmen Sie für zwei mögliche Positionen der Kletterstange jeweils die Koordinaten von P.

4 Analytische Geometrie - Wahlaufgabe

Die Abbildung zeigt – nicht maßstabsgetreu – ein Modell eines Obelisken. Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die xy -Ebene den ebenen Untergrund, auf dem der Obelisk steht; eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

Der untere Teilkörper $ABCDEFGH$ mit $B(0,45|0,45|0)$ ist ein Stumpf einer geraden Pyramide. Der Mittelpunkt des Quadrats $ABCD$ ist der Koordinatenursprung. Das Quadrat $EFGH$ ist parallel zur xy -Ebene.

Der obere Teilkörper $EFGHS$ mit $E(0,35|-0,35|7,16)$ ist eine gerade Pyramide. Der Punkt S liegt auf der z -Achse und stellt die Spitze des Obelisken dar.



- 4.1 Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der Gerade AE mit der z -Achse. 3 BE

zur Kontrolle: z -Koordinate des Schnittpunkts: 32,22

- 4.2 Berechnen Sie die Größe der Neigungswinkel der Seitenkanten des unteren Teilkörpers gegenüber dem Untergrund. 2 BE

- 4.3 Bestimmen Sie den Flächeninhalt einer der Seitenflächen des unteren Teilkörpers. 4 BE

- 4.4 Der untere Teilkörper des Obelisken besteht aus Granit. Ein Kubikmeter des verwendeten Materials hat eine Masse von 2,6 Tonnen. Bestimmen Sie die Masse des unteren Teilkörpers. 5 BE

- 4.5 Entscheiden Sie für jede der folgenden Gleichungen I bis IV, ob sie eine Symmetrieebene des Obelisken beschreibt. Begründen Sie für eine der Gleichungen, dass Sie keine solche Ebene darstellt. 4 BE

I $x = 0,45$ II $y = 0$ III $x - y = 0$ IV $x - z = 0$

Auf den Obelisken treffendes Sonnenlicht kann im Modell durch parallele Geraden mit dem

Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dargestellt werden.

- 4.6 Begründen Sie, dass der Schatten der Spitze des Obelisken nur dann auf dem Untergrund liegt, wenn der obere Teilkörper des Obelisken ausreichend hoch ist. 2 BE
- 4.7 Der Abstand des auf dem Untergrund liegenden Schattens der Spitze des Obelisken von dem Punkt, der im Modell durch B dargestellt wird, beträgt 5,1 Meter. Ermitteln Sie die Höhe des Obelisken. 5 BE